Continuidad de operadores pseudo-diferenciales en el toro

Manuel Alejandro Martínez Flores[1]

en conjunto con Duván Cardona[2]

[1]Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle de Guatemala, Guatemala

[2]Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete Mathematics
Ghent University, Bélgica

Octubre, 2025

Contents

Introducción

Antecedentes

El estudio de los operadores pseudo-diferenciales constituye una de las piedras angulares del análisis moderno, con aplicaciones profundas en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, el análisis armónico y la teoría espectral. Estos operadores generalizan tanto a los operadores diferenciales como a los multiplicadores de Fourier, permitiendo un tratamiento unificado de problemas que involucran no solo la regularidad de soluciones, sino también la acotación en diversos espacios funcionales. En el caso Euclidiano, la teoría está bien establecida gracias a los trabajos fundacionales de Alberto Calderón, Antoni Zygmund, Lars Hörmander y Charles Fefferman, pero sustancialmente desarrollada en trabajos de John Kohn, Louis Nirenberg, entre otros.

Operadores pseudo-diferenciales Euclidianos

Para $0 \leq \delta, \rho \leq 1$, se dice que $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ pertenece a la clase de símbolos de Hörmander $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ si

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \lesssim \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.$$

Su operador pseudo-diferencial correspondiente se define como

$$T_a f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi) \widehat{f}(\xi) \, \mathrm{d}\xi,$$

donde $\widehat{f}$ es la transformada de Fourier de f. Se dice $T_a \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Nota

Los operadores y símbolos tienen una relación biúnivoca dada por

$$a(x,\xi) = e^{-2\pi i x\cdot\xi} T(e^{2\pi i x\cdot\xi})$$

Resultado de continuidad de Fefferman

Teorema (Fefferman)

Sean $0 \leq \delta < 1 - \varepsilon < 1$, *y sea* $T \in \Psi^m_{1-\varepsilon,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. *Suponga que*

$$m \leq -n\varepsilon \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right|,$$

entonces el operador T *extiende a un operador continuo de* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *en sí mismo para* $1 < p < \infty$.

Aquí, se extiende este resultado al caso toroidal. Además, se estudia continuidad en espacios de Hardy, y espacios de Lebesgue pesados.

Operadores pseudo-diferenciales en el toro

Símbolos toroidales

Sea $m \in \mathbb{R}$, sean $0 \leq \delta, \rho \leq 1$. Entonces, la *clase de símbolos toroidales* $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ consiste de las funciones $a := a(x,\xi) : \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ que son suaves en x para todo ξ, y que satisfacen las desigualdades simbólicas

$$|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| \lesssim_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

para cualesquiera multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Además, $\langle \xi \rangle := \sqrt{1+|\xi|^2}$, y $\Delta_{\xi_j}\varphi(\xi) := \varphi(\xi + e_j) - \varphi(\xi)$ es el operador de diferencia discreta.

Operadores pseudo-diferenciales toroidales

Para $a \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, se denota T_a a su *operador pseudo-diferencial toroidal* correspondiente, que se define como

$$T_a f(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x\cdot\xi} a(x,\xi) \widehat{f}(\xi),$$

donde se utiliza la *transformada de Fourier toroidal*

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x\cdot\xi} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Además, se dice que $T_a \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$.

Equivalencia de símbolos

Teorema (Ruzhansky, Turunen)

Sea $0 \leq \delta \leq 1$ y sea $0 < \rho \leq 1$. El símbolo $\tilde{a} \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ es un símbolo toroidal si y solo si existe un símbolo euclideano $a \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{a} = a|_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n}$. Además, esta extensión es única modulo $S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Los operadores pseudo-difenciales que corresponden a estos símbolos son equivalentes, así como sus kernels de Schwartz

$$k(x,y) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi),$$

$$\tilde{k}(x,y) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} \tilde{a}(x,\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Algunos espacios de interés en ánalisis armónico

Espacios de Lebesgue (pesados)

Sea $w : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función localmente integrable no-negativa. Entonces, esta define una medida

$$w(E) = \int_E w(x)\,\mathrm{d}x.$$

Para $1 \leq p < \infty$, se define el *espacio de Lebesgue pesado* $L^p(\mathbb{T}^n; w)$, como el conjunto de funciones medibles $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ que satisfacen

$$\|f\|_{L^p(w)} := \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^p \,\mathrm{d}w(x) \right)^{1/p} < \infty,$$

Se dice que $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n; w)$, si es acotada excepto en un conjunto de w-medida cero. Cuando no se explicita w, se supone que es la medida de Lebesgue usual.

Espacios de Hardy

Sea $0 < p \leq 1$. Se le llama (p, q)-*átomo* a una función $a : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$, soportada en una bola B, que cumple que,

$$\|a\|_{L^q} \leq |B|^{1/q-1/p}, \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{T}^n} x^\beta a(x)\, \mathrm{d}x = 0,$$

con $0 \leq |\beta| \leq n(1/p - 1)$. Además, se dice que $f \in H^p(\mathbb{T}^n)$ si satisface

$$\|f\|_{H^p} := \inf \left\{ \left(\sum_j |\lambda_j|^p \right)^{1/p} : f = \sum_j \lambda_j a_j \right\} < \infty,$$

donde $\{a_j\}$ son sucesiones de (p, q)-átomos, ver Álvarez y Milman [2]

Espacio BMO

Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{T}^n)$, se define el *operador p-maximal sharp* de Fefferman-Stein como

$$\mathcal{M}_p^{\#} f(x) := \sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|^p \, \mathrm{d}y \right)^{1/p},$$

donde f_Q es el valor promedio de f sobre el cubo Q. Cuando $p = 1$, se suele denotar $f^{\#}$. Se dice que f pertenece al *espacio de funciones de oscilación media acotada* $\mathrm{BMO}(\mathbb{T}^n)$ si se tiene que $f^{\#} \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$. En ese caso se define la norma

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} := \|f^{\#}\|_{L^\infty}.$$

En realidad, se toma el cociente respecto a funciones constantes para que la definición de norma sea adecuada, ver Fefferman y Stein [2].

Operador maximal de Hardy-Littlewood

Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{T}^n)$, se define el *operador p-maximal de Hardy-Littlewood* como

$$\mathrm{M}_p f(x) := \sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^p \, \mathrm{d}y \right)^{1/p}.$$

Cuando p no se explicita, se supone que es igual a uno.

Resultados de continuidad

Estimaciones de kernel

Sea $T \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, con $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$, con símbolo $p := p(x, \xi)$ y con núcleo $k := k(x, y)$. Sea $\lambda := \text{máx}\{(\delta - \rho)/2, 0\}$.

1. Para cualquier $z \in \mathbb{T}^n$ fijo, y $\sigma \geq \varepsilon > 0$, se tienen las desigualdades para el kernel:
$$\sup_{|y-z|\leq\sigma} \int_{|x-z|>2\sigma} |k(x,y) - k(x,z)| \, \mathrm{d}x \leq C_\varepsilon,$$
$$\sup_{|y-z|\leq\sigma} \int_{|x-z|>2\sigma} |k(y,x) - k(z,x)| \, \mathrm{d}x \leq C_\varepsilon.$$
2. Si $m \leq -n[(1-\rho)/2 + \lambda]$, y $\sigma < 1$, se tiene para cualquier $z \in \mathbb{T}^n$ fijo,
$$\sup_{|y-z|\leq\sigma} \int_{|x-z|>2\sigma^\rho} |k(x,y) - k(x,z)| \, \mathrm{d}x \leq C.$$
3. Si $m \leq -n(1-\rho)/2$, y $\sigma < 1$, se tiene para cualquier $z \in \mathbb{T}^n$ fijo,
$$\sup_{|y-z|\leq\sigma} \int_{|x-z|>2\sigma^\rho} |k(y,x) - k(z,x)| \, \mathrm{d}x \leq C.$$

Espacios de Lebesgue

Teorema (con Cardona, 2025-I, J. Math. Anal. Appl.)

Sea $T \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, *con* $0 < \rho \leq 1$, *con* $0 \leq \delta < 1$, *con* $m \leq -n[(1-\rho)/2 + \lambda]$, *entonces* T *y su adjunto* T^* *son aplicaciones continuas*

1. *del espacio de Hardy* $H^1(\mathbb{T}^n)$ *en* $L^1(\mathbb{T}^n)$,
2. *de* $L^\infty(\mathbb{T}^n)$ *en* $\mathrm{BMO}(\mathbb{T}^n)$.

Se puede utilizar el argumento de interpolación compleja de Fefferman y Stein, junto con la continuidad $L^2(\mathbb{T}^n)$ cuando $m \leq -n\lambda$, para extender este resultado a los espacios $L^p(\mathbb{T}^n)$, con $1 < p < \infty$, para símbolos de orden

$$m \leq -n\left[(1-\rho)\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| + \lambda\right],$$

con $\lambda = \max\{(\delta-\rho)/2, 0\}$.

Descomposición diádica

En el análisis posterior, se define la siguiente descomposición 'diádica' en los anillos

$$A_j(z,\sigma) = \{x \in \mathbb{T}^n : 2^j\sigma < |x-z| < 2^{j+1}\sigma\}\ , \quad j = 1,2,3,...$$

Estimaciones de kernel

Sea $T \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$ con kernel $k := k(x, y)$. Entonces,

1. Si $\sigma \geq \varepsilon > 0$, y $j = 1, 2, 3, \ldots$, entonces existe C_ε, que no depende de σ, j, o z, tal que

$$\sup_{|y-z|<\sigma} \int_{A_j(z,\sigma)} |k(y, x) - k(z, x)| \, \mathrm{d}x \leq C_\varepsilon 2^{-j},$$

$$\sup_{|y-z|<\sigma} \int_{A_j(z,\sigma)} |k(x, y) - k(x, z)| \, \mathrm{d}x \leq C_\varepsilon 2^{-j},$$

2. Si $m \leq -n[(1-\rho)/2 + \lambda]$, $0 < \gamma \leq 1$, $\sigma < 1$, y $j = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\sup_{|y-z|<\sigma} \int_{A_j(z,\sigma^\gamma)} |k(x, y) - k(x, z)| \, \mathrm{d}x \leq C 2^{-j/\rho} \sigma^{1-\gamma/\rho}.$$

3. Si $m \leq -n(1-\rho)/2$, $0 < \gamma \leq 1$, $\sigma < 1$, y $j = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\sup_{|y-z|<\sigma} \int_{A_j(z,\sigma^\gamma)} |k(y, x) - k(z, x)| \, \mathrm{d}x \leq C 2^{-j/\rho} \sigma^{1-\gamma/\rho}.$$

Desde espacios de Hardy en espacios de Lebesgue

Teorema (con Cardona, 2025-II)

Sea $T \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$. *Suponga que*

$$m \leq -\beta - n\lambda \quad \textit{para algún} \quad (1-\rho)\frac{n}{2} \leq \beta < \frac{n}{2}.$$

Entonces, el operador T *es una aplicación continua de* $H^p(\mathbb{T}^n)$ *en* $L^p(\mathbb{T}^n)$ *para* $1 \geq p \geq p_0$ *cuando* $\rho < 1$, *donde*

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1}{2} + \frac{\beta(1/\rho + n/2)}{n(1/\rho - 1 + \beta)},$$

y para $1 \geq p > p_0 = n/(n+1)$ *cuando* $\rho = 1$.

En espacios de Hardy

Teorema (con Cardona, 2025-II)

Sea $T \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$. *suponga que*

$$m \leq -\beta - n\lambda \quad \textit{para algún} \quad (1-\rho)\frac{n}{2} \leq \beta \leq \frac{n}{2},$$

y que $T^*(1) = 0$ *en el sentido de BMO. Entonces el operador* T *es una aplicación continua de* $H^p(\mathbb{T}^n)$ *en sí mismo para* $p_0 < p \leq 1$ *donde*

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1}{2} + \frac{\beta(1/\rho + n/2)}{n(1/\rho - 1 + \beta)}.$$

Pesos de Muckenhoupt

Para una función localmente integrable no-negativa $w : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, se dice que pertenece a la *clase de pesos de Muckenhoupt* A_p, si

$$\mathrm{M}w(x) \lesssim w(x), \quad \text{casi para todo } x, \quad p = 1;$$

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)\,\mathrm{d}x \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-1/(p-1)}\,\mathrm{d}x \right)^{p-1} < \infty, \quad 1 < p < \infty.$$

Particularmente, se tiene que el operador maximal de Hardy-Littlewood es continuo en $L^q(w)$ para $w \in A_p$, con $p \leq q$.

Espacios de Lebesgue pesados

Teorema (con Cardona, 2025-III)

Sea $1 < r \leq 2$, y sea $0 < \rho < 1$. Suponga que $m \leq -n(1-\rho)/r$ y $\sigma \in S^m_{\rho,\rho}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Entonces se tiene que

$$\mathcal{M}^{\#}_r(T_\sigma f)(x) \lesssim \mathrm{M}_r f(x)$$

para $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, y $\mathcal{M}^{\#}_r$ el operador maximal sharp.

Esto implica que para $0 \leq \delta \leq \rho < 1$, con $r \leq p < \infty$, y $m \leq -n(1-\rho)/r$, se tiene que si $\sigma \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, y $w \in A_{p/r}$, entonces

$$\|T_\sigma f\|_{L^p(w)} \lesssim \|\mathcal{M}^{\#}_r(T_\sigma f)\|_{L^p(w)} \lesssim \|\mathrm{M}_r f\|_{L^p(w)} \lesssim \|f\|_{L^p(w)},$$

para cualquier $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Referencias

- Álvarez, J. y Hounie, J.: *Estimates for the kernel and continuity properties of pseudo-differential operators*. Arkiv för Matematik, 28(1–2):1–22, 1990
- Álvarez, J. y Milman, M.: *Vector valued inequalities for strongly singular Calderón-Zygmund operators*. Revista Matemática Iberoamericana, 2(4):405–426, 1986
- Cardona, D. y Martínez, M. A.: *Estimates for pseudo-differential operators on the torus revisited. I*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 554(2):129959, 2026, ISSN 0022-247X
- Cardona, D. y Martínez, M. A.: *Estimates for pseudo-differential operators on the torus revisited. II*, 2025. preprint arXiv:2505.01573
- Cardona, D. y Martínez, M. A.: *Estimates for pseudo-differential operators on the torus revisited. III*, 2025. preprint arXiv:2508.13338

Referencias

- Fefferman, C.: *Lp bounds for pseudo-differential operators*. Israel Journal of Mathematics, 14(4):413–417, 1973
- Fefferman, C. y Stein, E. M.: *Hp spaces of several variables*. Acta Mathematica, 129(0):137–193, 1972
- Ruzhansky, M. y Turunen, V.: *Quantization of Pseudo-Differential Operators on the torus*. Journal of Fourier Analysis and Applications, 16:943–982, 2010.

Más sobre mí