Continuidad de operadores pseudo-diferenciales en el toro

Manuel Alejandro Martínez Flores

Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle de Guatemala, Guatemala

asesorado por Dr. Duván Cardona

Diciembre, 2025

Contenidos

1. Introducción

2. Preliminares y Herramientas

3. Espacios de Hardy y BMO

4. Operadores Pseudo-diferenciales en el Toro

5. Continuidad en espacios de Lebesgue

6. Continuidad en espacios de Sobolev

7. Resultados con Pesos

8. Continuidad en Espacios de Hardy H^p

9. Conclusiones

Introducción

Contexto General

El análisis armónico y la teoría de operadores pseudo-diferenciales constituyen herramientas fundamentales en el análisis armónico moderno.

- Permiten estudiar la regularidad de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales.
- Unifican la teoría de operadores diferenciales y multiplicadores de Fourier.
- Proveen un marco para cuantificar la acotación en diversos espacios funcionales.

En el caso Euclidiano ($\mathbb{R}^n$), la teoría está bien establecida gracias a trabajos de Alberto Calderón, Antoni Zygmund, Lars Hörmander y Charles Fefferman.

Notación y Terminología

A lo largo de esta presentación utilizaremos la siguiente notación estándar:

- **Desigualdad salvo constantes:** $A \lesssim B$ indica que existe una constante $C > 0$ tal que $A \leq CB$. Si C depende de un parámetro α, escribimos $A \lesssim_\alpha B$.
- **Soportes japoneses:** Definimos $\langle x \rangle := \sqrt{1 + |x|^2}$ para capturar el comportamiento asintótico sin presentar problemas en el origen.
- **Multi-índices:** Para $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, denotamos la derivada parcial como $\partial^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ y su longitud como $|\alpha| = \sum \alpha_i$.

El Problema en el Caso Euclidiano

Para $0 \leq \delta, \rho \leq 1$, consideramos la clase de símbolos de Hörmander $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, constituida por funciones suaves $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, que satisfacen:

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \lesssim_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.$$

El operador pseudo-diferencial asociado se define como:

$$T_a f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi) \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

donde $\widehat{f}$ corresponde a la transformada de Fourier usual en $\mathbb{R}^n$. Entonces, se dice que $T_a \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

El Teorema Clásico de Fefferman

Uno de los resultados centrales que motiva esta tesis es el siguiente:

Teorema (Fefferman [5])

Sean $0 \leq \delta < 1 - \varepsilon < 1$, *y sea* $T \in \Psi^{m}_{1-\varepsilon,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. *Suponga que*

$$m \leq -n\varepsilon \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right|.$$

Entonces el operador T *extiende a un operador continuo de* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *en sí mismo para* $1 < p < \infty$.

Objetivos de la Tesis

El análisis en el toro $\mathbb{T}^n$ presenta desafíos únicos debido a la naturaleza discreta del espacio de frecuencias $(\mathbb{Z}^n)$. Los objetivos son:

1. Formalizar el cálculo simbólico en el toro utilizando diferencias finitas discretas.
2. Extender los resultados de continuidad L^p de Fefferman y Álvarez-Hounie [7] al contexto toroidal.
3. Establecer condiciones precisas para la continuidad en la escala de espacios de Hardy H^p $(p \leq 1)$.
4. Obtener resultados en espacios con pesos A_p acorde a técnicas de Park y Tomita [10], y espacios de Sobolev.

Note que no es posible extender los resultados euclidianos al toro mediante el uso de cartas locales, debido a que los operadores pseudo-diferenciales no son estables cuando $\rho < 1-\delta$. Además, los espacios de funciones de Hardy y BMO no son estables al multiplicarse por funciones test, lo que no permite realizar una partición de la unidad adecuada.

Preliminares y Herramientas

Definiciones Básicas en el Toro

Se define al toro n-dimensional como el grupo aditivo cociente $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$.

El toro puede ser identificado con el conjunto $[0,1)^n$.

Además, se considera con la topología cociente y la medida de Lebesgue restringida.

Espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{T}^n)$

Sea $w : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ una función localmente integrable no-negativa. Entonces, se puede definir una medida

$$w(E) := \int_E w(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definición (Espacios de Lebesgue pesados)

Se dice que una función (fuertemente) medible $f : \mathbb{T}^n \to X$, pertenece al espacio de Lebesgue pesado $L^p(\mathbb{T}^n; X; w)$ cuando

$$\|f\|_{L^p(w)} := \left(\int_{\mathbb{T}^n} \|f(x)\|_X^p \,\mathrm{d}w(x)\right)^{1/p} < \infty,$$

para $1 \leq p < \infty$. Cuando $p = \infty$, cuando es acotada excepto en un conjunto de w-medida cero.

Propiedades Básicas de L^p

Proposición (Desigualdad de Hölder)

Sean $1 \leq p, q \leq \infty$, *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Entonces, para* $g \in L^q(\Omega; X)$ *y* $f \in L^p(\Omega; \mathcal{B}(X, Y))$, *se tiene que* $fg \in L^1(\Omega; Y)$ *y*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Proposición (Desigualdad de Minkowski)

Dado $1 \leq p \leq \infty$, *sean* $f, g \in L^p(\Omega; X)$. *Entonces se tiene que*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Continuidad de Tipo Débil

Definición (Tipo Débil (p, q))

Sea T un operador desde $L^p(\Omega; X; w)$ al espacio de funciones medibles desde Σ hacia Y. Se dice que T es de tipo (p, q) débil respecto a los pesos (u, w), con $q < \infty$, si se tiene que:

$$u\{x \in \Sigma : \|Tf(x)\|_Y > \lambda\} \lesssim \left(\frac{\|f\|_{L^p(w)}}{\lambda}\right)^q \quad .$$

Esta noción es crucial para aplicar teoremas de interpolación como el de Marcinkiewicz.

Interpolación de Marcinkiewicz

Teorema (Interpolación de Marcinkiewicz)

Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, *y* $1 \leq q_0 < q_1 \leq \infty$, *tales que* $p_j < q_j$. *Y sea* T *un operador sublineal de tipo débil* (p_0, q_0) *y* (p_1, q_1), *respecto a las medidas* (u, w). *Entonces, se tiene que* T *es de tipo fuerte* (p, q) *respecto a* (u, w) *para* $p_0 < p < p_1$, $q_0 < q < q_1$, *y* $p \leq q$, *con la forma*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Análisis de Fourier en $\mathbb{T}^n$ y $\mathbb{Z}^n$

Definición (Espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n; X)$)

El espacio de funciones de decaimiento rápido $\varphi : \mathbb{Z}^n \to X$ *tales que para todo* $M > 0$,

$$\|\varphi(\xi)\|_X \lesssim_M \langle \xi \rangle^{-M}.$$

Definición (Transformada de Fourier periodica)

Sea $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : C^\infty(\mathbb{T}^n; X) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n; X)$ *definida por*

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Su inversa es

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi)(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x\cdot\xi} \varphi(\xi).$$

Identidad de Plancherel

La teoría L^2 se fundamenta en la isometría entre el espacio de funciones y el espacio de coeficientes.

Teorema (Identidad de Plancherel)

Si $u \in L^2(\mathbb{T}^n; X)$, *entonces* $\widehat{u} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n; X)$, *y se cumple que*

$$\|\widehat{u}\|_{\ell^2} = \|u\|_{L^2}.$$

Distribuciones en el Toro

Definición (Distribuciones Periódicas $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$)

El espacio de distribuciones periódicas $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n; X)$ consiste de los operadores lineales continuos definidos de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ en X.

Toda función $f \in L^p(\mathbb{T}^n; X)$ es una distribución periódica mediante el funcional definido como

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Teorema (Distribuciones Discretas $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n; X)$)

Los operadores lineales continuos definidos de $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ en X tienen la forma

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} u(\xi)\varphi(\xi).$$

Análisis de distribuciones

Definición (Derivada Distribucional)

Para $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$*, definimos su derivada distribucional* $\partial^\alpha u$ *mediante:*

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad .$$

Definición (Transformada de Fourier distribucional)

Además, se define la transormada de Fourier distribucional $\mathcal{F} : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n; X) \to \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n; X)$*, como*

$$\langle \mathcal{F}u, \varphi \rangle := \langle u, \imath \circ \mathcal{F}^{-1} \varphi \rangle.$$

Donde $(\imath \circ f)(x) = f(-x)$.

Espacios de Sobolev

Definición (Espacios de Sobolev)

Sea $1 \leq p \leq \infty$ *y sea* $k \in \mathbb{N}_0$*. El espacio de Sobolev* $W_p^k(\mathbb{T}^n; X)$ *consiste de todas las funciones* $f \in L^p(\mathbb{T}^n; X)$ *tales que para cualquier multi-índice* $|\alpha| \leq k$ *se tiene que* $\partial^\alpha f$ *existe (en el sentido de distribuciones) y pertenecen a* $L^p(\mathbb{T}^n; X)$*. Para tales funciones se define*

$$\|f\|_{W_p^k} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, \quad (1 \leq p < \infty).$$

Espacios de Hardy y BMO

Espacio de Hardy H^1

Se adapta la teoría de Fefferman-Stein [12]. Con $\Omega = \mathbb{R}^n, \mathbb{T}^n$.

Definición (Espacio de Hardy H^1)

Se dice que $f \in L^1(\Omega; X)$ se encuentra en el espacio de Hardy $H^1(\Omega; X)$ si existen $f_1, \ldots, f_n \in L^1(\Omega; X)$ que satisfacen

$$\widehat{f_j}(\xi) = \frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi).$$

Se escribe $f_j =: R_j f$ (transformada de Riesz), y se define la norma

$$\|f\|_{H^1} := \|f\|_{L^1} + \sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_{L^1}.$$

Espacios de Hardy Atómicos H^p_{at}

Para $0 < p \leq 1$, definimos $H^p(\mathbb{T}^n)$ mediante átomos (p, q).

Definición (Átomo (p, q))

Sea $1 \leq q \leq \infty$ y $p \leq 1$. Una función $a(x)$ es un (p, q)-átomo si existe una bola B tal que:

1. $\operatorname{supp} a \subset B$.
2. $\|a\|_{L^q} \leq |B|^{1/q-1/p}$.
3. *Momentos nulos:* $\int x^\beta a(x)\, \mathrm{d}x = 0$ *para* $0 \leq |\beta| \leq n(1/p - 1)$.

Equivalencia de Definiciones Atómicas

Teorema

Se tiene que $H_{at}^{p,q}(\Omega; X) = H_{at}^{p,r}(\Omega; X)$ *para cualesquiera* $1 \leq q, r \leq \infty$, *con equivalencia de normas.*

En particular, $H^1(\Omega; X) = H_{at}^{1,\infty}(\Omega; X)$. Esto justifica el uso de átomos (p, ∞) o $(p, 2)$ indistintamente para definir H^p.

Espacio BMO

Definición (Espacio BMO)

Se dice que f pertenece al espacio de funciones de oscilación media acotada $\mathrm{BMO}(\Omega; X)$ *si se tiene que el operador maximal sharp $f^{\#} \in L^{\infty}$, donde:*

$$f^{\#}(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q \|f(y) - f_Q\|_X \, \mathrm{d}y.$$

Se define la norma $\|f\|_{\mathrm{BMO}} := \|f^{\#}\|_{L^{\infty}}$.

Dualidad H^1-BMO

Este resultado es fundamental para la interpolación compleja.

Teorema (Fefferman [6])

Suponga X' satisface la propiedad de Radon-Nikodym. Entonces, el dual de $H^1(\Omega; X)$ es $\mathrm{BMO}(\Omega; X')$, con $\Omega = \mathbb{R}^n, \mathbb{T}^n$.

1. *Para $\varphi \in \mathrm{BMO}$, el funcional $f \mapsto \int_\Omega \varphi(x) f(x)\, \mathrm{d}x$ es acotado en H^1.*
2. *Para cualquier funcional continuo en H^1, se comporta como el funcional en (1) para una única función $\varphi \in \mathrm{BMO}$.*

Interpolación Compleja

Ahora, se presenta el argumento de interpolación compleja de Feffeman-Stein [12].

Teorema

Sea $z \mapsto T_z$ una familia analítica de operadores. Fije $1/p = 1 - \theta/2$ con $0 < \theta < 1$.

1. *Si* $\sup_y \|T_{iy} f\|_{L^1} \lesssim \|f\|_{H^1}$, *y* $\sup_y \|T_{1+iy} f\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2}$, *entonces*
$$\|T_\theta f\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$
2. *Si* $\sup_y \|T_{iy} f\|_{\mathrm{BMO}} \lesssim \|f\|_{L^\infty}$, *y* $\sup_y \|T_{1+iy} f\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2}$, *entonces*
$$\|T_\theta f\|_{L^{p'}} \lesssim \|f\|_{L^{p'}}.$$

Operadores Pseudo-diferenciales en el Toro

Diferencias Finitas Discretas

Se sigue el marco desarrollado por Ruzhansky y Turunen [11]. Para definir clases de símbolos en el retículo $\mathbb{Z}^n$, reemplazamos derivadas por diferencias finitas.

Definición

Sea $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$, *entonces se definen los operadores de diferencia como*

$$\Delta_{\xi_j}\varphi(\xi) := \varphi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi),$$

$$\overline{\Delta}_{\xi_j}\varphi(\xi) := \varphi(\xi) - \varphi(\xi - \delta_j).$$

Además, para un multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, *se define* $\Delta_\xi^\alpha := \Delta_{\xi_1}^{\alpha_1} \cdots \Delta_{\xi_n}^{\alpha_n}$.

Propiedades de Diferencias Finitas

Proposición (Suma por partes)

Sean $\varphi, \psi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$. Entonces, se tiene que

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi)[\Delta_\xi^\alpha \psi(\xi)] = (-1)^{|\alpha|} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} [\overline{\Delta}_\xi^\alpha \varphi(\xi)]\psi(\xi),$$

dado que ambas series sean absolutamente convergentes.

Además, se cumple una regla del producto análoga a la de Leibniz:

$$\Delta_\xi^\alpha(\varphi\psi)(\xi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} [\Delta_\xi^\beta \varphi(\xi)][\Delta_\xi^{\alpha-\beta}\psi(\xi+\beta)].$$

Expansión de Taylor Discreta

Teorema (Expansión de Taylor discreta)

Sea $p : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$*. Entonces, se puede escribir como*

$$p(\xi + \theta) = \sum_{|\alpha| < M} \frac{1}{\alpha!} \theta^{(\alpha)} \Delta_\xi^\alpha p(\xi) + r_M(\xi, \theta),$$

donde $\theta^{(\alpha)}$ *es el polinomio discreto factorial y el residuo satisface*

$$|\Delta_\xi^\omega r_M(\xi, \theta)| \lesssim_M \max_{|\alpha| = M,\, \nu \in Q(\theta)} |\theta^{(\alpha)} \Delta_\xi^{\alpha+\omega} p(\xi + \nu)|.$$

Clase de Símbolos Toroidales

Definición (Clase de símbolos toroidales $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$)

Sea $m \in \mathbb{R}$, sean $0 \leq \delta, \rho \leq 1$. Entonces, la clase de símbolos toroidales $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ consiste de las funciones $a := a(x,\xi) : \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ que son suaves en x para todo ξ, y que satisfacen las desigualdades simbólicas

$$|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| \lesssim_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

para cualesquiera multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Operadores Pseudo-diferenciales Toroidales

Definición (Operadores pseudo-diferenciales toroidales)

Para $a \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, se denota T_a a su operador pseudo-diferencial toroidal correspondiente, que se define como

$$T_a f(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x\cdot\xi} a(x,\xi) \widehat{f}(\xi).$$

Además, se dice que $T_a \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$.

Para $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, la serie converge absolutamente y $T_a f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

El Kernel de Schwartz Toroidal

La definición de T_a sugiere la representación integral:

$$T_a f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} k(x,y) f(y) \, \mathrm{d}y,$$

donde $k(x,y)$ es el *kernel de Schwartz* que se expresa en el sentido de distribuciones como:

$$k(x,y) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi).$$

Teorema de Equivalencia de Símbolos

Este resultado es crucial pues permite conectar la teoría discreta con la continua.

Teorema (Ruzhansky, Turunen [11])

Sea $0 \leq \delta \leq 1$ *y* $0 < \rho \leq 1$*. El símbolo* $\tilde{a} \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ *es un símbolo toroidal si y solo si existe un símbolo euclideano* $a \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ *tal que* $\tilde{a} = a|_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n}$*. Además, esta extensión es única modulo* $S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$*.*

Además, los operadores pseudo-diferenciales correspondientes coinciden.

Continuidad en espacios de Lebesgue

Propiedades del Kernel para L^p

Teorema (Cardona, M., JMAA [1])

Sea $T \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ con kernel $k(x,y)$.

1. *k es suave fuera de la diagonal.*
2. *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, para $N > (m + n + |\alpha + \beta|)/\rho$ se tiene:*

$$\sup_{x \neq y} |x - y|^N |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k(x,y)| = C_{\alpha\beta N} < \infty.$$

Este decaimiento polinomial es esencial para probar la acotación en espacios L^p usando la teoría clásica. La demostración se basa en integración por partes y las propiedades de decaimiento del símbolo.

Acotación en $L^2(\mathbb{T}^n)$

El siguiente resultado es análogo al de Jorge Hounie [9]. Aquí y en la secuela, $\lambda := \text{máx}\{(\delta-\rho)/2, 0\}$.

Teorema (Cardona, M., JMAA [1])

Sea $\tilde{p} : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *un símbolo tal que para* $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$, $m \leq -n\lambda$ *y* $|\alpha|, |\beta| \leq \lceil n/2 \rceil$ *satisface:*

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tilde{p}(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.$$

Entonces $T_{\tilde{p}}$ *es acotado de* $L^2(\mathbb{T}^n)$ *en sí mismo.*

Estimaciones del Kernel

Para demostrar la continuidad en L^p, se obtienen estimativos de kernel para utilizar un argumento similar al clásico de Fefferman y Stein.

Teorema (Cardona, M., JMAA [1])

Sea $T \in \Psi^m_{\rho,\delta}$ con las condiciones usuales.

- *Si $\sigma \geq \varepsilon$,*

$$\sup_{|y-z|\leq\sigma} \int_{|x-z|>2\sigma} |k(x,y) - k(x,z)| \, \mathrm{d}x \leq C_\varepsilon.$$

- *Si $m \leq -n[(1-\rho)/2 + \lambda]$ y $\sigma < 1$:*

$$\sup_{|y-z|\leq\sigma} \int_{|x-z|>2\sigma^\rho} |k(x,y) - k(x,z)| \, \mathrm{d}x \leq C.$$

También son válidos los estimativos en la otra variable del kernel.

Continuidad de Tipo Débil (1,1)

Teorema (Cardona, M., JMAA[1])

Sea $T \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$*, con* $0 < \rho \leq 1$*,* $0 \leq \delta < 1$*,* $m \leq -n[(1-\rho)/2 + \lambda]$*, entonces* T *es del tipo débil* $(1,1)$*.*

Esto se prueba utilizando una descomposición de Calderón-Zygmund y un argumento con convoluciones similar al de Fefferman. Este resultado se demostró para el caso general de operadores con kernel valuado en operadores análoga a la de Álvarez y Milman [8].

Continuidad $H^1 \to L^1$ y $L^\infty \to \mathrm{BMO}$

Teorema (Cardona, M., JMAA [1])

Sea $T \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, *con* $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$. *Si* $m \leq -n[(1-\rho)/2 + \lambda]$, *entonces* T *y su adjunto* T^* *son aplicaciones continuas:*

- *del espacio de Hardy* $H^1(\mathbb{T}^n)$ *en* $L^1(\mathbb{T}^n)$,
- *de* $L^\infty(\mathbb{T}^n)$ *en* $\mathrm{BMO}(\mathbb{T}^n)$.

Note que ya no se requiere $\delta < \rho$ como en el resultado de Fefferman.

Bosquejo de la Prueba: $H^1 \to L^1$

Sea a un átomo en $B(z,\sigma)$. Queremos acotar $\|Ta\|_{L^1}$ uniformemente. Suponemos $\sigma < 1$, el caso complementario es análogo.

1. **Descomposición:** Dividimos la integral en $B'(z, 2\sigma^\rho)$ (parte local) y su complemento (parte lejana).
2. **Parte Local:** Usamos Hölder y la acotación $L^q \to L^2$.

$$\int_{B'} |Ta| \lesssim |B'|^{1/2} \|Ta\|_{L^2} \lesssim |B'|^{1/2} \|a\|_{L^{2/(2-\rho)}} \leq C.$$

3. **Parte Lejana:** Usamos la propiedad de cancelación del átomo ($\int a = 0$) y las estimaciones del kernel del teorema anterior para acotar:

$$\int_{\mathbb{T}^n \setminus B'} |Ta(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{T}^n \setminus B'} \int_B |k(x,y) - k(x,z)| |a(y)| \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \leq C.$$

Bosquejo de la Prueba: $L^\infty \to \mathrm{BMO}$

Sea $f \in L^\infty$. Para cada bola $B(z,\sigma)$, descomponemos $f = f\chi_{B'} + f\chi_{(B')^c} = f_1 + f_2$. De nuevo suponemos $\sigma < 1$.

1. **Término f_1 (Local):** Usamos que T es acotado en $L^2 \to L^{2/\rho}$.

$$\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1| \lesssim |B|^{-\rho/2}\|Tf_1\|_{L^{2/\rho}} \lesssim |B|^{-\rho/2}\|f_1\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^\infty}.$$

2. **Término f_2 (Lejano):** Para $x \in B$, $Tf_2(x)$ es una función suave. Elegimos la constante $c_B = Tf_2(z)$ (centro de la bola).

$$\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_2(x) - c_B|\,\mathrm{d}x \leq \sup_{x\in B}\int_{(B')^c} |k(x,y) - k(z,y)||f(y)|\,\mathrm{d}y \lesssim \|f\|_{L^\infty}.$$

Teorema Principal: Continuidad $L^p(\mathbb{T}^n)$

Usando el argumento de interpolación compleja entre los resultados extremos (H^1, L^1)-(L^2, L^2) y (L^2, L^2)-(L^∞, BMO):

Teorema (Cardona, M., JMAA [1])

Sea $T \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, con $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$ y

$$m \leq -n \left[(1-\rho) \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| + \lambda \right].$$

Entonces T es una aplicación continua de $L^p(\mathbb{T}^n)$ en sí mismo.

Continuidad $L^p \to L^q$

Utilizando potenciales de Bessel y la desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev, se puede extender a

Teorema (Cardona, M., JMAA [1])

Sea $T \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. T es continuo de $L^p(\mathbb{T}^n)$ en $L^q(\mathbb{T}^n)$ si:

- *Caso $1 < p \leq 2 \leq q$: $m \leq -n(1/p - 1/q + \lambda)$.*
- *Caso $2 \leq p \leq q$: $m \leq -n[1/p - 1/q + (1-\rho)(1/2 - 1/p) + \lambda]$.*
- *Caso $p \leq q \leq 2$: $m \leq -n[1/p - 1/q + (1-\rho)(1/q - 1/2) + \lambda]$.*

Continuidad en espacios de Sobolev

Espacios de Sobolev revisitados

Se define al potencial de Bessel J^s como el operador pseudo-diferencial con símbolo $\langle \xi \rangle^s$.

Definición

Se dice que $f \in W_p^s(\mathbb{T}^n)$*, si se tiene que* $J^s f \in L^p(\mathbb{T}^n)$*. Se define la norma* $\|f\|_{W_p^s} := \|J^s\|_{L^p}$*.*

Esta definición coincide con la presentada anteriormente cuando s es un entero positivo.

Continuidad en Espacios de Sobolev

Teorema (Cardona, M. [3])

Sean $0 \leq \delta < 1$, $0 < \rho \leq 1$, $m \in \mathbb{R}$, *y* $T \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. *Entonces,* T *se extiende a un operador acotado de* $W^s_p(\mathbb{T}^n)$ *en* $W^{s-\mu}_q(\mathbb{T}^n)$ *para* $1 < p \leq q < \infty$ *si:*

- *Caso* $1 < p \leq 2 \leq q$: $\mu \geq m + n(1/p - 1/q + \lambda)$.
- *Caso* $2 \leq p \leq q$: $\mu \geq m + n[1/p - 1/q + (1-\rho)(1/2 - 1/p) + \lambda]$.
- *Caso* $p \leq q \leq 2$: $\mu \geq m + n[1/p - 1/q + (1-\rho)(1/q - 1/2) + \lambda]$.

Demostración

La demostración utiliza la propiedad de composición con los potenciales de Bessel J^s.

$$\|Tf\|_{W_q^{s-\mu}} = \|J^{s-\mu}Tf\|_{L^q} = \|(J^{s-\mu}TJ^{-s})J^s f\|_{L^q}.$$

El operador compuesto $S = J^{s-\mu}TJ^{-s}$ es un operador pseudo-diferencial con orden $m-\mu$. Si se cumplen las condiciones del teorema $L^p \to L^q$ para el orden $m-\mu$, entonces S es acotado de L^p en L^q.

$$\|S(J^s f)\|_{L^q} \lesssim \|J^s f\|_{L^p} = \|f\|_{W_p^s}.$$

Resultados con Pesos

Operadores maximales

Definición

Se define al operador p-maximal de Hardy-Littlewood como

$$\mathrm{M}_p f(x) := \sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Definición

Y al operador sharp p-maximal de Fefferman-Stein como

$$\mathcal{M}_p^{\#} f(x) := \sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p},$$

donde f_Q es el promedio en el cubo Q.

Clases de Pesos de Muckenhoupt A_p

Definición (Clases de pesos de Muckenhoupt)

Para un par de funciones localmente integrables no-negativas $u, w : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, se dice que pertenece a la clase de pesos de Muckenhoupt A_p, si

$$\mathrm{M}u(x) \lesssim w(x), \quad \textit{casi para todo } x, \quad p = 1;$$

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u(x)\, \mathrm{d}x \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-1/(p-1)}\, \mathrm{d}x \right)^{p-1} < \infty, \quad 1 < p < \infty.$$

El operador maximal de Hardy-Littlewood M es de tipo débil (p, p) respecto a w si y solo si $w \in A_p$.

Desigualdad Puntual

Se procede como en Park y Tomita [10].

Teorema (Cardona, M. [3])

Sea $1 < r \leq 2$, $0 < \rho < 1$ y suponga que $\sigma \in S^m_{\rho,\rho}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ con $m \leq -n(1-\rho)/r$. Entonces, para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$:

$$\mathcal{M}_r^{\#}(T_\sigma f)(x) \lesssim \mathrm{M}_r f(x).$$

Esto implica la continuidad en $L^p(w)$ para $w \in A_{p/r}$:

$$\|T_\sigma f\|_{L^p(w)} \lesssim \|\mathcal{M}_r^{\#} f\|_{L^p(w)} \lesssim \|\mathrm{M}_r f\|_{L^p(w)} \lesssim \|f\|_{L^p(w)}.$$

Continuidad en Espacios de Hardy H^p

Estimaciones del Kernel

En este caso se obtienen estimativos en descomposiciones anulares diádicas:

$$A_j(z,\sigma) := \{x \in \mathbb{T}^n : 2^j\sigma < |x-z| \leq 2^{j+1}\sigma\}.$$

Teorema (Cardona, M. [2])

Sea $T \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ con las condiciones usuales.

- *Si $\sigma \geq \varepsilon$,*

$$\sup_{|y-z|\leq\sigma} \int_{A_j(z,\sigma)} |k(x,y) - k(x,z)| \, \mathrm{d}x \leq C_\varepsilon 2^{-j}.$$

- *Si $m \leq -n[(1-\rho)/2 + \lambda]$ y $\sigma < 1$:*

$$\sup_{|y-z|\leq\sigma} \int_{A_j(z,\sigma^\gamma)} |k(x,y) - k(x,z)| \, \mathrm{d}x \leq C 2^{-j/\rho} \sigma^{1-\gamma/\rho}.$$

Estos estimativos también son válidos en la otra variable.

Continuidad $H^p \to L^p$

Teorema (Cardona, M. [2])

Sea $T \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$. *Suponga que*

$$m \leq -\beta - n\lambda \quad \textit{para algún} \quad (1-\rho)\frac{n}{2} \leq \beta < \frac{n}{2}.$$

Entonces, el operador T *es continuo de* $H^p(\mathbb{T}^n)$ *en* $L^p(\mathbb{T}^n)$ *para* $1 \geq p \geq p_0$ *donde*

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1}{2} + \frac{\beta(1/\rho + n/2)}{n(1/\rho - 1 + \beta)}.$$

Concepto de Molécula

La imagen de un átomo Ta no tiene soporte compacto. Introducimos el concepto de molécula.

Definición (Molécula (p, θ, μ))

Una función $M(x)$ asociada a una bola $B(z, \sigma)$ es una molécula si satisface $\int M = 0$ y condiciones de decaimiento. Si $\sigma \geq 1$:

- $\int \|M(x)\|_Y^2 \, \mathrm{d}x \lesssim \sigma^{n(1-2/p)}$.
- $\int \|M(x)\|_Y^2 |x - z|^\mu \, \mathrm{d}x \lesssim \sigma^{\mu + n(1-2/p)}$.

Y si $\sigma < 1$:

- $\int \|M(x)\|_Y^2 \, \mathrm{d}x \lesssim \sigma^{n(1/q-2/p)}$.
- $\int \|M(x)\|_Y^2 |x - z|^\mu \, \mathrm{d}x \lesssim \sigma^{\theta\mu + n(1/q-2/p)}$.

Aquí θ y q son parámetros.

Continuidad $H^p \to H^p$

Lema

Si M es una molécula con μ suficientemente grande, entonces $M \in H^p$ y su norma solo depende de las constantes de las condiciones de molécula.

Teorema (Cardona, M. [2])

Sea $T \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$. Suponga que

$$m \leq -\beta - n\lambda \quad \textit{para algún} \quad (1-\rho)\frac{n}{2} \leq \beta < \frac{n}{2}.$$

Si además $T^*(1) = 0$ (en el sentido de BMO), entonces T es acotado de $H^p(\mathbb{T}^n)$ en sí mismo para $p_0 < p \leq 1$, donde

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1}{2} + \frac{\beta(1/\rho + n/2)}{n(1/\rho - 1 + \beta)}.$$

Bosquejo de Prueba: $H^p \to H^p$

Este teorema también fue demostrado en el contexto de operadores con kernel valuado en operadores.

1. **Átomos:** Sea a un átomo $(p, 2)$. Queremos ver que Ta tiene norma H^p uniforme.
2. **Moléculas:** Se demuestra que bajo las hipótesis del teorema, $M = Ta$ satisface las condiciones de una molécula (p, θ, μ), con constantes que dependen unicamente del operador.
   - Las estimaciones L^2 y L^q de T controlan la norma L^2 de M cerca del soporte del átomo.
   - Las estimaciones del kernel controlan el decaimiento de M lejos del soporte.
3. **Cancelación:** Se usa la condición $T^*(1) = 0$:

$$\int Ta = \langle 1, Ta \rangle = \langle T^*(1), a \rangle = 0.$$

4. **Conclusión:** Como Ta es una molécula, $\|Ta\|_{H^p} \leq C$.

Conclusiones

Resumen de Aportes

1. **Marco Teórico:** Se consolidó la teoría de operadores pseudo-diferenciales en el toro usando análisis discreto y el teorema de equivalencia.
2. **Resultados L^p:** Se probaron condiciones óptimas de continuidad en L^p y $L^p \to L^q$ para clases generales $S^m_{\rho,\delta}$, extendiendo resultados previos de Fefferman, Álvarez-Hounie y Delgado.
3. **Espacios de Hardy:** Se desarrolló la teoría de moléculas en el toro para probar continuidad $H^p \to L^p$ y $H^p \to H^p$ bajo la condición $T^*(1) = 0$.
4. **Pesos y Sobolev:** Se obtuvieron desigualdades con pesos A_p y resultados en la escala de Sobolev mediante el operador maximal sharp.

Referencias Seleccionadas (I)

- Cardona, D. y Martínez, M. A.: *Estimates for pseudo-differential operators on the torus revisited. I.* J. Math. Anal. Appl., 2026.
- Cardona, D. y Martínez, M. A.: *Estimates for pseudo-differential operators on the torus revisited. II.* arXiv:2505.01573, 2025.
- Cardona, D. y Martínez, M. A.: *Estimates for pseudo-differential operators on the torus revisited. III.* arXiv:2508.13338, 2025.

Referencias Seleccionadas (II)

- Delgado, J.: *L^p bounds for pseudo-differential operators on the torus*. Operator Theory: Advances and Applications, 2012.
- Fefferman, C.: *L^p bounds for pseudo-differential operators*. Israel Journal of Mathematics, 1973.
- Fefferman, C.: *Characterizations of bounded mean oscillation*. Bulletin of the American Mathematical Society, 1971.
- Álvarez, J. y Hounie, J.: *Estimates for the kernel and continuity properties of pseudo-differential operators*. Arkiv för Matematik, 1990.
- Álvarez, J. y Milman, M.: *Vector valued inequalities for strongly singular Calderón-Zygmund operators*. Revista Matemática Iberoamericana, 2(4):405–426, 1986.

Referencias Seleccionadas (III)

Hounie, J.: *On the L2 continuity of pseudo-differential operators*. Communications in Partial Differential Equations, 11(7):765–778, 1986.

Park, B. J. y Tomita, N.: *Sharp maximal function estimates for linear and multilinear pseudo-differential operators*. Journal of Functional Analysis, 287(12), 2024

Ruzhansky, M. y Turunen, V.: *Pseudo-differential operators and symmetries: Background analy- sis and advanced topics*. Birkhäuser, Basel, 2010

Fefferman, C. y Stein, E. M.: *Hp spaces of several variables*. Acta Mathematica, 129(0):137–193, 1972.

Stein, E. M.: *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. Princeton Univ. Press, 1993.

¡Gracias por su atención!